

31/3/21

Ορθογώνιοι Πινάκες

Π.χ: $A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Διάνυσμα του } \mathbb{R}^n$

$(x_1, \dots, x_n) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

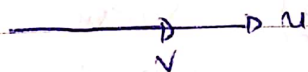
Θα δείξω ότι είναι διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, αφού το γράφουμε σαν διάνυσμα

Φυλλάδιο (4)

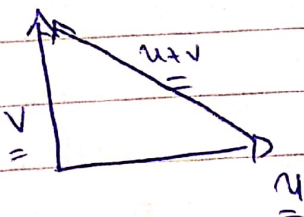
1) ο Ευκλείδειος χώρος $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$, $1 < u, v > \leq \|u\| \cdot \|v\|$
 Πότε ισχύει αυτό? Όταν τα u, v είναι ρ.ε $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \Rightarrow \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = 1 \Rightarrow \cos \phi = 1 \Rightarrow \phi = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Τα u, v είναι γρ. εξαρτ. δηλ είναι το ένα πολλαπλό του άλλου



β) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ Πυθαγόρειο Θέωρημα. Από το προηγούμενο: $\|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v$



$$2) \langle -, - \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 5a_2b_2 \text{ Νόο είναι εσωτ.} \\ \text{Γινόμενο.}$$

Λύση:

Σ' αυτές τις περιπτώσεις γράφω πίνακα!

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = (a_1, a_2)_{1 \times 2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

Οι 3 πρώτες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ισχύουν και τις ιδιότητες των πινάκων:

$$\langle (a_1, a_2), (a_1, a_2) \rangle = 2a_1^2 - 4a_1a_2 + 5a_2^2 = 2(a_1^2 - 2a_1a_2) + 5a_2^2 = 2(a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 \geq 0 \text{ και είναι } = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Διότι είναι μήκος 1: $\|(a_1, a_2)\|^2 = 1 \Leftrightarrow 2(a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 = 1$
Μήκος δ' αυτές το εσωτερικό γινόμενο

Αλλά στο κανονικό εσωτερικό γινόμενο η παράσταση:

$$2(a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 = 1 \text{ ορίσει ellipse}$$

3) $V = \langle u_1 = (1, 1, 0, 0), u_2 = (0, -1, 0, 2), u_3 = (0, 0, -2, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$
 με το κανονικό

Ελέγχουμε ότι u_1, u_2, u_3 είναι γ.α.ε.ζ.: (κάνω πίνακα)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ rank} = 3 \Leftrightarrow \text{γ.α.ε.ζ.}$$

Αρα κάνω τη διαδοχική G-S

$$v_1 = u_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 =$$

$$= (0, -1, 0, 2) - \frac{\langle (0, -1, 0, 2), (1, 1, 0, 0) \rangle}{\langle (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle} (1, 1, 0, 0) =$$

$$= (0, -1, 0, 2) + \frac{1}{2} (1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2 \right) \rightarrow v_2' = (1, -1, 0, 4) \\ v_2' \perp v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle u_3, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (0, 0, -3, 1) - \frac{4}{18} (1, -1, 0, 4) - 0 = 0 \Rightarrow v_3 = (0, 0, -3, 1) - \frac{2}{9} (1, -1, 0, 4) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, -3, \frac{1-8}{9} \right) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, -3, -\frac{7}{9} \right) \rightarrow$$

$$v_3' = (-2, 2, -18, 1) \quad v_3' \perp v_1, v_3' \perp v_2'$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0, 0), w_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} (1, -1, 0, 4), w_3 = \frac{1}{\sqrt{333}} (-2, 2, -18, 1)$$

$$V = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$$

$$u_4 = (0, 0, 0, 1) \quad v_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, v_3' \rangle}{\langle v_3', v_3' \rangle} v_3' - \frac{\langle u_4, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle u_4, v_1' \rangle}{\langle v_1', v_1' \rangle} v_1' = (0, 0, 0, 1) - \frac{1}{333} (-2, 2, -18, 1) - \frac{4}{333} (1, -1, 0, 4) = \left(\frac{2-4}{333}, \frac{-2+4}{333}, \frac{18}{333}, 1 + \frac{-1-16}{333} \right) = \frac{1}{333} (-2, 2, 18, 316)$$

Αν γράψουμε το ορθογώνιο συμπληρωμα του V?

$$V^\perp = \langle v_4 \rangle \quad \text{Διότι } v_4 \perp w_1, w_2, w_3 \text{ από τη διαίσθηση α-5}$$

5) $V = \{ (x, y, z) \mid x - y - z = 0 \}$: Τι ωμβολίζει γεωμετρικά ο V ?
 Είναι εδο είναι: $x = y + z$ που γεννιέται από $w = \langle \underbrace{(1, 1, 0)}_{u_1}, \underbrace{(1, 1, 1)}_{u_2} \rangle$
 No των u_1, u_2 ορθοκανονικών!

Λύση:

$$G - S : v_1 = u_1$$

$$v_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2} (1, 1, 0) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \rightarrow v_2' = (1, -1, 2)$$

$V^\perp$: Ψάχνω ένα διάνυσμα που να είναι κάθετο στο άλλο

Παίρνω το $u_3 = (0, 1, 0)$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2' \rangle}{\langle v_2', v_2' \rangle} v_2' - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (0, 1, 0) + \frac{1}{6} (1, -1, 2) -$$

$$- \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}, \frac{2}{6} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$V^\perp = \langle (-1, 1, 1) \rangle \text{ διαγί το } v_3 \text{ με το } \|v_3\| = \frac{1}{3}$$

$$W = \{ (x, y, z) \mid x + 2y - 3z = 0, 2x + y - 3z = 0 \} :$$

: Τομή επιπέδων = Ευθεία

$$x = 3z - 2y$$

$$6z - 4y + y - 3z = 0 \Rightarrow 3z - 3y = 0 \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z$$

$$W = \langle \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \rangle \quad u = (1, 1, 1)$$

$$V = \langle (1, 1, 0), (1, -1, 2) \rangle$$

$$\text{proj}_V(u) = \text{proj}_{(1, 1, 0)}(1, 1, 1) + \text{proj}_{(1, -1, 2)}(1, 1, 1) =$$

$$= \frac{\langle (1, 1, 1), (1, 1, 0) \rangle}{\langle (1, 1, 0), (1, 1, 0) \rangle} \cdot (1, 1, 0) + \frac{\langle (1, 1, 1), (1, -1, 2) \rangle}{\langle (1, -1, 2), (1, -1, 2) \rangle} \cdot (1, -1, 2) =$$

$$= \frac{2}{2} (1, 1, 0) + \frac{2}{6} (1, -1, 2) = (1, 1, 0) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$4) \mathbb{R}_3[x] \quad u_1, u_2, u_3 \\ \langle x, x^2, x^3 \rangle$$

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = x^2 - \frac{\int_0^1 x^3 dx}{\int_0^1 x^2 dx} \cdot x = x^2 - \frac{3}{4} x$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = x^3 - \frac{\int_0^1 (x^5 - \frac{3}{4} x^2) dx}{\int_0^1 (x^4 - \frac{3}{2} x^3 + \frac{9}{16} x^2) dx} (x^2 - \frac{3}{4} x) - \frac{\int_0^1 x^4 dx}{\int_0^1 x^2 dx} x =$$

$$= x^3 - \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}} (x^2 - \frac{3}{4} x) - \frac{3}{5} x =$$

$$= x^3 + \frac{\frac{1}{12}}{\frac{16-30+15}{90}} (x^2 - \frac{3}{4} x) - \frac{3}{5} x =$$

$$= x^3 + \frac{90}{12} (x^2 - \frac{3}{4} x) - \frac{3}{5} x = x^3 + \frac{30}{4} x^2 - \frac{90}{16} x - \frac{3}{5} x =$$

$$= x^3 + \frac{30}{4} x^2 - \frac{498}{90} x$$

Μετα βγαινομε και τα λιγα τους.

$$\text{Ορθογωνια βαση} \langle x, x^2 - \frac{3}{4} x, x^2 + \frac{15}{2} x^2 - \frac{83}{15} x \rangle$$

$$6) \mathbb{R}_n[x] \quad v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \text{ διαδοχικοι } (n+1) \text{ αριθμοι!} \\ \langle f, g \rangle = f(v_0)g(v_0) + f(v_1)g(v_1) + \dots + f(v_n)g(v_n)$$

Εξετάζουμε τις ιδιοτητες:

$$1) \langle f + f', g \rangle = (f(v_0) + f'(v_0))g(v_0) + \dots + (f(v_n) + f'(v_n))g(v_n) = \\ = \langle f, g \rangle + \langle f', g \rangle$$

$$2) \langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$$

$$3) \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$$

4) $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = \text{μυδευμένο πολυώνυμο}$ $\Rightarrow$ f έχει $(n+1)$ ρίζες και είναι βαθμού n
 $f(x) = (x-r_0)(x-r_1) \dots (x-r_n)$ $\Rightarrow$ $f=0$

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

$$A \cdot A^t = I = A^t \cdot A \rightarrow \text{Στους πραγματ.}$$

$$A \cdot A^{-t} = I = A^{-t} \cdot A \rightarrow \text{II - μιγαλ}$$

Ιδιότητες ορθ. πινάκων:

1) Γραμμές ή στήλες του αποτελούν ορθοκανονική βάση

$$2) \langle u, v \rangle = \langle (Au)^t, (Av)^t \rangle$$

$$3) \det A = \pm 1$$

4) Πινόμενα ορθογώνιων $\Rightarrow$ ορθογώνιο

5) Οι ιδιοτιμές τους έχουν μέτρο 1 και αν είναι πραγματικές είναι ± 1

π.χ. 1) I είναι ορθογώνιος, $\begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \pm 1 & \\ 0 & & \dots \pm 1 \end{pmatrix}$ ορθογώνιος

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \text{ ορθογώνιοι}$$

$\downarrow$
 Δίνει στροφή κατά
 γωνία ϕ

$\downarrow$
 Είναι ωφέλιμα ως προς άξονα ο οποίος
 διευθύνει γωνία $\frac{\phi}{2}$ με τον xx' και

έχει ιδιοτιμές ± 1

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$: ορθογώνιος. Γιατί? Επειδή οι γραμμές ή οι στήλες του αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Αυτό έχει ότι αποτελεί ορθογώνιο πινάκω και έχει 1 μονάδα και τα άλλα 0

π.χ. Να υπολογιστούν τα a, b, γ ώστε ο επόμενος πίνακας να είναι ορθογώνιος.

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & a \\ 0 & 2/\sqrt{6} & b \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \gamma \end{pmatrix}$$

Ποια: Οι στήλες του πρέπει να αποτελούν ορθή βάση

Οπλ. $\langle \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, (a, b, \gamma) \rangle = 0 \Rightarrow -\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow a = \gamma$

$\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, (a, b, \gamma) \rangle = 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{2b}{\sqrt{6}} + \frac{\gamma}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow a + 2b = -\gamma$

$a^2 + b^2 + \gamma^2 = 1$ *

$(a, b, \gamma) = (a, -a, a)$ * $\Rightarrow a^2 + a^2 + a^2 = 1 \Rightarrow 3a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Έχω 2 πίνακες

$$\begin{pmatrix} | & | & \sqrt{3}/3 \\ & & -\sqrt{3}/3 \\ & & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} | & | & -\sqrt{3}/3 \\ & & \sqrt{3}/3 \\ & & -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα: Ένας ορθογώνιος πίνακας απεικονίζει ορθοκανονική βάση σε ορθοκανονική.

Απόδ.:

Έστω $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $A \cdot A^t = I = A^t \cdot A$ και $\mathbb{R}^n = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ ορθοκανονική βάση. Θα δείξουμε ότι:

$\{ \underset{\uparrow \text{συν}}{(A u_i)^t} \mid i=1, \dots, n \}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση

Αρκεί να δείξουμε $\langle (A u_i)^t, (A u_i)^t \rangle = 1$ και $\langle (A u_i)^t, (A u_j)^t \rangle = 0 \quad i \neq j$

$$\langle u_i A^t, u_i A^t \rangle = u_i A^t (u_i A^t)^t = u_i A^t \cdot A \cdot u_i^t = u_i I u_i^t = \langle u_i, u_i \rangle = 1$$

$$\langle u_i A^t, u_j A^t \rangle = u_i u_j^t = \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

Πρόταση: Ο πίνακας μεταβάλλει από την ορθοκανονική βάση $S = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ στην ορθοκανονική $S' = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ είναι ορθογώνιος.

Απόδ.:

As είναι 1_S^S ο πίνακας μεταβάλλει της ταυτοσυν. Οι στήλες του δίνονται από τους συντελεστές των:

$$u_i = a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \dots + a_{in} v_n \quad \text{και αυτό θα είναι η } i\text{-στήλη του } 1_S^S = (a_{ij})$$

Θα δείξουμε ότι οι στήλες του 1_S^S αποτελούν ορθοκανονική βάση:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{i \neq j}{=} \langle u_i, u_j \rangle &= \langle a_{i1} v_1 + a_{i2} v_2 + \dots + a_{in} v_n, a_{j1} v_1 + a_{j2} v_2 + \dots + a_{jn} v_n \rangle \\ &= a_{i1} a_{j1} \langle v_1, v_1 \rangle + a_{i1} a_{j2} \langle v_1, v_2 \rangle + \dots + a_{i1} a_{jn} \langle v_1, v_n \rangle + \\ &\quad a_{i2} a_{j1} \langle v_2, v_1 \rangle + a_{i2} a_{j2} \langle v_2, v_2 \rangle + \dots + a_{i2} a_{jn} \langle v_2, v_n \rangle + \dots \\ &\quad a_{in} a_{j1} \langle v_n, v_1 \rangle + a_{in} a_{j2} \langle v_n, v_2 \rangle + \dots + a_{in} a_{jn} \langle v_n, v_n \rangle = \end{aligned}$$

$a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \dots + a_{in} a_{jn}$ = γινόμενο της i -στήλης με τη j -στήλη του $1_S^S \quad i \neq j$

$$1 = \langle u_i, u_i \rangle = a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2$$

Θεώρημα Euler

Ευχαρίστησε όλους τους 2x2 ορθογώνιους πίνακες

Θεώρημα: Κάθε 3x3 ορθογώνιος πίνακας με θετική ορίζουσα έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή ίση με 1 και παριστά στροφή σε επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1. Δηλ το γινόμενο επίπεδο είναι κάθετο στον $\langle v_1 \rangle$ με $A \cdot v_1 = 1 \cdot v_1$

Απόδ.

$A \cdot A^t = I = A^t \cdot A$, $\det A = 1$ και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det A \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 \Rightarrow$ έχει ιδιοτιμές μόνους 1 και οι είναι πραγματικές τότε είναι ± 1

Αν $\lambda_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_2 \cdot \bar{\lambda}_2 = \|\lambda_2\|^2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$ αδύνατο γιατί $\det A$ θα έχει > 0

Αρα τουλάχιστον $\exists$ μια είναι ίση με 1 ($\lambda_1 = 1$). Βρίσκουμε το v_1 με $A v_1 = 1 \cdot v_1$ επενδύουμε το $\{v_1\}$ σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$: $\{v_1, v_2, v_3\}$. Ορίζουμε τον P να έχει στήλες τα v_1, v_2, v_3 ώστε $\det P = 1$. Ο P είναι ορθογώνιος όπως και ο A . Ο πίνακας $P^t \cdot A \cdot P$ είναι επίσης ορθογώνιος και έχει ιδιοτιμή το 1 με ιδιοδιάνυσμα το $(1, 0, 0)$: $P^t \cdot A \cdot P = P^t \cdot A \cdot (v_1^t, v_2^t, v_3^t) = P^t \cdot A \cdot P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= P^t \cdot A \cdot \begin{pmatrix} v_1^t & v_2^t & v_3^t \end{pmatrix}_{3 \times 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = P^t \cdot A \cdot v_1^t =$$

$$= P^t v_1^t = (v_1^t, v_2^t, v_3^t)^t v_1^t = \begin{pmatrix} v_1 & \text{στήλες} \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} v_1^t =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 v_1^t = 1 \\ v_2 v_1^t = 0 \\ v_3 v_1^t = 0 \end{pmatrix} \quad \text{Διότι η βάση είναι ορθοκανονική}$$

Δείξτε ότι ο $P^t A P$ έχει ιδιοτιμή το 1 με ιδιοδιάνυσμα
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Η πρώτη του στήλη θα είναι $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & \delta \\ 0 & \epsilon & \delta \end{pmatrix}$

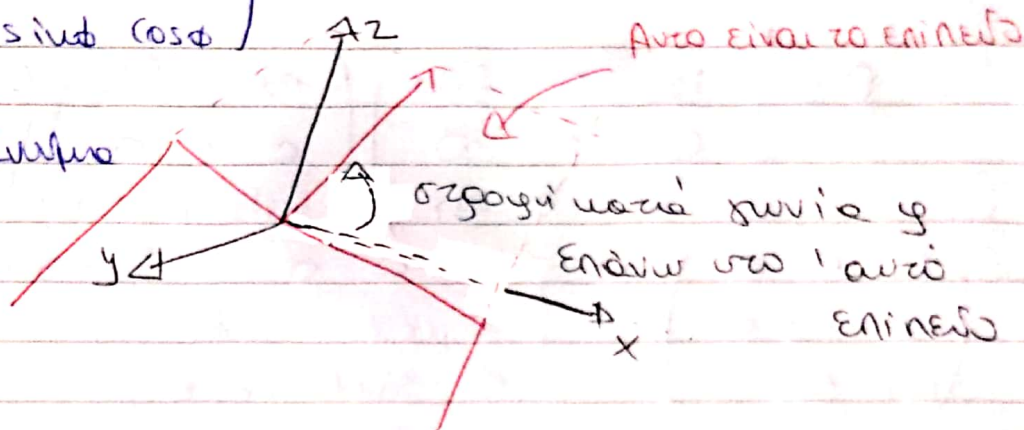
ορθογωνία $\Rightarrow a=b=0$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & \delta \\ 0 & \epsilon & \delta \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} \epsilon & \delta \\ \epsilon & \delta \end{pmatrix} 2 \times 2$ ορθογωνίας $\Rightarrow$ $\epsilon^2 + \delta^2 = 1$

Επίσης $\det(P^t A P) = \det P^t \det A \det P = 1$

$\det(P^t A P) = \det \begin{pmatrix} \epsilon & \delta \\ \epsilon & \delta \end{pmatrix} = 1$ και ορθογωνίας $\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$

$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ +10 κλίση γύρω y

$A \rightarrow v_i$: ιδιοδιάνυσμα



Π.Χ: Ν.β. 0 αξονας και 4 γύρω στρογγυλά του ϵ $\Rightarrow$ $\epsilon^2 + \delta^2 = 1$

$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ Δείχνουμε ότι $A A^t = I$ και $\det A = 1$

$$\det A = -\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \det \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Από το Θ.Εuler ο A έχει ιδιοτιμή το 1. Να βρούμε το

$$v_1 : (A - 1I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \quad (1)$$

$$-2y = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (1) \Rightarrow z = \sqrt{3} \cdot x$$

$$v_1 = (x, 0, \sqrt{3} \cdot x) = x (1, 0, \sqrt{3}) \Rightarrow v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Αυτός είναι ο άξονας. Επευτείνουμε σε ορθοκανονική βάση

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

ώστε να έχουμε ορίζουσα 1

$$\det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{Άρα:}$$

$$\begin{aligned} P^{-1} A \cdot P &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \phi = 0 \end{aligned}$$

Ο A μας δίνει στρογγυλά κατά πάνω ή στο επίπεδο το οποίο είναι κάθετο στον άξονα που δημιουργείται από το διάνυσμα $(1/2, 0, \sqrt{3}/2) = v_1'$